Leçon 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Extrait du rapport de jury

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. et sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.
Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières r selon le corps de base, en particulier d'étudier les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 106 intitulée : "Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.". Les espaces vectoriels ont un caractère géométrique très naturel. On s'intéresse donc à cette vision géométrique en étudiant le groupe linéaire de ces espaces.
Dans une première partie on s'intéresse à une étude purement algébrique du groupe linéaire. Dans un premier point on parle de généralités où l'on rappelle la définition du groupe linéaire ainsi que des caractérisations d'appartenance à ce groupe. On parle ensuite rapidement du déterminant qui nous permet d'introduire la groupe spécial linéaire puis l'on termine cette partie en parlant des centres de ces deux groupes. Dans un deuxième point on s'intéresse aux générateurs du groupe linéaire en commençant par introduire les notions de transvections et de dilatations ainsi que des caractérisations puis on montre que les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et qu'en rajoutant les dilatations on obtient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tout entier (on obtient aussi au passage une autre famille génératrice : les matrices diagonalisables inversibles. On termine cette première partie avec un dernier point sur les groupes projectifs et le groupe dérivé : on donne la définition des groupes projectifs ainsi que quelques propriétés et on termine en donnant les groupes dérivés en fonction de n et du corps $\mathbb{K}$ de base.
Dans une deuxième partie on s'intéresse au groupe linéaire dans le cas d'un corps fini en commençant par donner le cardinal du groupe linéaire et spécial linéaire sur un corps fini ainsi que le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension p de E. On termine ce point avec un bref retour sur les centres et groupes dérivés avant d'en venir à la décomposition de Fitting et au dénombrement des endomorphismes nilpotents sur un corps fini. Dans un deuxième point on donne quelques isomorphismes exceptionnels en faisant le lien entre les groupes projectifs et symétriques (qui n'existent pas en général).
Dans une troisième partie on parle d'action de groupes sur les espaces de matrices en commençant par le cas de l'action par translation : on introduit les actions par translation et on donne des caractérisations d'appartenance à une orbite via le noyau et l'image. Cette action est reliée au pivot de Gauss et les théorèmes 43 et 44 justifient son intérêt. On parle ensuite de l'action par équivalence en commençant par en donner la définition ainsi qu'une brève description des orbites et on enchaîne avec l'action de conjugaison et on fait le lien avec les matrices semblables ainsi que les propriétés de classes telles que la diagonalisabilité ou encore la trigonalisabilité. On termine avec une dernière action qui est l'action par congruence où l'on donne juste la définition ainsi que le théorème 60 qui est utile pour la réduction des formes quadratiques.
On termine avec une dernière partie consacrée au cas du corps des réels ou des complexes. On traite d'abord du cas du groupe orthogonal en introduisant les matrices orthogonales puis des générateurs du groupe orthogonal et spécial orthogonal. Dans un deuxième point on donne des propriétés topologiques du groupe linéaire notamment des résultats de compacité ainsi que de connexité. Enfin, on conclut cette leçon avec quelques sous-groupes finis du groupe linéaire en commençant par énoncer le théorème de Burnside puis en traitant les cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Plan

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, n, m deux entiers naturels non nul et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I Étude algébrique du groupe linéaire

I.1 Généralités

Définition 1 : Groupe linéaire de E [Rombaldi, p.139] :
On appelle **groupe linéaire de** E et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. On note également $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2 : [Rombaldi, p.139]
Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et l'on utilisera cette identification par la suite.

Théorème 3 : [Rombaldi, p.140]
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ $u \in \mathrm{GL}(E)$. $*$ $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. $*$ $\mathrm{Im}(u) = E$. $*$ $\mathrm{rg}(u) = n$. $*$ $\det(u) \neq 0$.
$*$ Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. $*$ Il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{Id}_E$.
$*$ u transforme toute base de E en une base de E.

Proposition 4 :
L'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes surjectif.

Définition 5 : Groupe spécial linéaire de E [Rombaldi, p.141] :
On appelle **groupe spécial linéaire de** E et on note $\mathrm{SL}(E)$ le noyau de l'application det (soit $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \det(u) = 1\}$). On note également $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 6 : [Rombaldi, p.141]
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.

Corollaire 7 : [Rombaldi, p.141]
On a la suite exacte :

$$\{I_n\} \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\det} \mathbb{K}^* \longrightarrow \{I_n\}$$

Et en particulier : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*$.

Théorème 8 : [Francinou (1), p.349]
Soit $\mathbb{L}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2.
Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et $n, m \geq 2$, alors :

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{L}) \cong \mathrm{GL}_m(\mathbb{L})) \iff (n = m)$$

$$(\mathrm{SL}_n(\mathbb{L}) \cong \mathrm{SL}_m(\mathbb{M})) \iff (n = m \text{ et } \mathbb{K} \cong \mathbb{L}) \quad \text{(ADMIS)}$$

Théorème 9 : [Rombaldi, p.141]
On a $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^* I_n$ et $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \mu_n(\mathbb{K}) I_n$, où $\mu_n(\mathbb{K})$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{K}$.

Remarque 10 : [Rombaldi, p.142]
Puisque le groupe $\mu_n(\mathbb{K})$ est cyclique et d'ordre divisant n, il en est de même de $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}))$.

I.2 Générateurs du groupe linéaire

Définition 11 : Transvection [Rombaldi, p.145] :
On considère φ une forme linéaire non nulle sur E.
On appelle **transvection d'hyperplan** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ toute application $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a,\ a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Théorème 12 : [Rombaldi, p.146]
$*$ Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = \mathrm{Id}_H$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subseteq H$.
$*$ Pour tout transvection $\tau_{\varphi,a}$, $\tau_{\varphi,2a}^2$ est une transvection.
$*$ Une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$, son inverse est la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, 1 est l'unique valeur propre de $\tau_{\varphi,a}$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(\varphi)$ pour $u \neq \mathrm{Id}_E$.
$*$ Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une transvection est une transvection.
$*$ L'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
$*$ Une transvection u admet un polynôme minimal qui est $(X-1)$ lorsque $u = \mathrm{Id}_E$ ou $(X-1)^2$ lorsque $u \neq \mathrm{Id}_E$.

Théorème 13 : [Rombaldi, p.147]
Soit $u \in \mathcal{L}(E) \backslash \{\mathrm{Id}_E\}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est une transvection.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme suivante :
$T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.
$*$ $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $(X-1)^n$.

Corollaire 14 : [Rombaldi, p.148]
$*$ Pour $\mathbb{K}$ infini, toute transvection différente de Id_E s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.
$*$ Si $n \geq 3$, alors toutes les transvections différentes de Id_E sont conjugués dans $\mathrm{SL}(E)$.

Définition 15 : Dilatation [Rombaldi, p.150] :
On considère φ une forme linéaire non nulle sur E.
On appelle **dilatation d'hyperplan** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a,\ a \in E \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Théorème 16 : [Rombaldi, p.150]
Une dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si, $\lambda = 1 + \varphi(a) \neq 0$.

Théorème 17 : [Rombaldi, p.150]
$*$ Un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe un hyperplan H tel que $u|_H = \mathrm{Id}_H$ et u diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0;1\}$ (donc $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$).
$*$ Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
$*$ Une dilatation u de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X-1)(X-\lambda)$.
$*$ L'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 18 : [Rombaldi, p.152]
Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est une dilatation de rapport λ.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $I_n + (\lambda-1)E_{n,n}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0;1\}$.

Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]

Théorème 19 : [Rombaldi, p.688]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
A s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Corollaire 20 : [Francinou (1), p.343]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices diagonalisables inversibles.

I.3 Groupes projectifs et groupe dérivé

Définition 21 : Groupe (spécial) projectif linéaire [Rombaldi, p.142] :
On appelle **groupe (spécial) projectif linéaire** le groupe quotient de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (respectivement de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$) par son centre.

Théorème 22 : [Rombaldi, p.142]
On a $Z(\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})) = Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \left\{\overline{I_n}\right\}$.

Théorème 23 : [Rombaldi, p.142]
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Théorème 24 : [Perrin, p.102]
Le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K})$ est simple, sauf lorsque $n = 2$ et ($\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$).

Théorème 25 : [Rombaldi, p.154]
Pour $n \geq 2$, on a :
* $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) \subseteq D(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
* Pour $n \geq 3$, $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = D(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
* Pour $n = 2$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$ et $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_3$, $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = D(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

II Sur un corps fini

Dans toute cette partie, on considère un corps $\mathbb{K}$ commutatif fini à $q = p^r$ éléments (avec p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$).

II.1 Généralités

Proposition 26 : [Rombaldi, p.156]

$$\mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(q^n - q^k\right) \text{ et } \mathrm{Card}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)) = \frac{1}{q-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(q^n - q^k\right)$$

Corollaire 27 : [Rombaldi, p.157]
Pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, il y a $\frac{\prod_{k=n-(p-1)}^{n}\left(q^k-1\right)}{\prod_{k=1}^{p}\left(q^k-1\right)}$ sous-espaces vectoriels de dimension p dans E.

Proposition 28 : [Rombaldi, p.158]
L'ensemble $T_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures de termes diagonaux égaux à 1 est un sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ (et même de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$) de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (c'est donc aussi un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$).

Proposition 29 : [Rombaldi, p.158]
Si G est un groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout nombre premier p, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Proposition 30 : [Perrin, p.105]
Le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ est de cardinal égal à $q-1$ et celui de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ est de cardinal égal à $\mathrm{PGCD}(n, q-1)$.

Remarque 31 : [Rombaldi, p.155]
* Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, on a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
* Pour $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, on a $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{A}_3$.
* Pour $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, on a $D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) \cong \mathbb{H}_8$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on considère u un endomorphisme de E mais le corps $\mathbb{K}$ de base n'est plus supposé fini.

Lemme 32 : [Caldero, p.74]
Les suites $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante au sens de l'inclusion.
De plus, ces deux suites sont stationnaires à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Lemme 33 : Lemme de Fitting [Caldero, p.74] :
Avec les notations du lemme précédent, on a $E = \mathrm{Ker}\left(u^{n_0}\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u^{n_0}\right)$.
De plus, u induit un endomorphisme nilpotent sur $\mathrm{Ker}\left(u^{n_0}\right)$ et un automorphisme sur $\mathrm{Im}\left(u^{n_0}\right)$.

Définition 34 : Décomposition de Fitting [Caldero, p.74] :
La donnée de $((F,G), v, w)$ où $F = \mathrm{Ker}\left(u^{n_0}\right)$, $G = \mathrm{Im}\left(u^{n_0}\right)$, $v = u|_F$ et $w = u|_G$ avec $E = F \oplus G$, v nilpotent et w un automorphisme est appelée **décomposition de Fitting**.

Théorème 35 : [Caldero, p.74]
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini commutatif de cardinal q, alors il y a $n_d = q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

II.2 Quelques isomorphismes exceptionnels

Les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathfrak{S}_m$ sont en général des groupes qui ne sont pas isomorphes. Cependant, il existe quelques exceptions et on qualifie ces isomorphismes "d'exceptionnels".

Proposition 36 : [Perrin, p.106]
On a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$.

Théorème 37 : [Perrin, p.106]
On a les isomorphismes suivants :
* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$.
* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$.
* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{S}_5$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathfrak{A}_5$.

III Action sur les espaces de matrices et pivot de Gauss

III.1 Action par translation : pivot de Gauss

Définition 38 : Action de translation à gauche [Rombaldi, p.184] :
L'application $\Psi : \begin{array}{|ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P,A) & \longmapsto & PA \end{array}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée **action par translation à gauche**.

Proposition 39 : [Rombaldi, p.184]
Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de translation à gauche si, et seulement si, elles ont le même noyau.

Définition 40 : Action de translation à droite [Rombaldi, p.184] :
L'application $\Psi : \begin{array}{|ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P,A) & \longmapsto & AP^{-1} \end{array}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée **action par translation à droite**.

Proposition 41 : [Rombaldi, p.184]
Deux matrices sont dans la même orbite pour l'action de translation à droite si, et seulement si, elles ont la même image.

Remarque 42 : [Rombaldi, p.185]
Le noyau et l'image sont respectivement des invariants totaux pour l'action de translation à gauche/ à droite.

Théorème 43 : [Rombaldi, p.191]
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que la matrice PA soit échelonnée en ligne.
Cette matrice PA est donc dans l'orbite de A pour l'action de translation à gauche

Théorème 44 : [Rombaldi, p.192]
Une opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire $AX = b$ le transforme en un système équivalent.

Remarque 45 :
C'est ces deux derniers théorèmes qui justifient que la méthode du pivot de Gauss fonctionne bien pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

III.2 Action par équivalence

Définition 46 : Action par équivalence [Rombaldi, p.195] :
L'application $\Psi : \begin{array}{|ccc} (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q),A) & \longmapsto & PAQ^{-1} \end{array}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée **action par équivalence**.

Proposition 47 : [Rombaldi, p.195]
Les orbites pour l'action par équivalence sont les matrices de rang r pour tout $r \in [\![0; \min(n,m)]\!]$.

Théorème 48 : [Rombaldi, p.198]
Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sont de même rang (donc dans la même orbite).

Théorème 49 : [Rombaldi, p.198]
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de rang $r \geq 1$.
Il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, produits de matrices élémentaires, telles que $PAQ^{-1} = J_r$.

III.3 Action par conjugaison

Définition 50 : Action par conjugaison [Rombaldi, p.199] :
L'application $\Psi : \begin{array}{|ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P,A) & \longmapsto & PAP^{-1} \end{array}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée **action par conjugaison**.

Définition 51 : Matrices semblables [Rombaldi, p.199] :
Deux matrices dans la même orbite pour l'action de conjugaison sont appelées **matrices semblables**.

Remarque 52 : [Rombaldi, p.199]
Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse !

Proposition 53 : [Rombaldi, p.199]
Deux matrices semblables ont le même rang/déterminant/polynôme caractéristique/polynôme minimal/trace.

Remarque 54 : [Rombaldi, p.199]
Les éléments cités dans la proposition précédente sont des invariants mais pas totaux : il faut plus pour que la réciproque soit vraie !

Proposition 55 : [Rombaldi, p.199]
Les propriétés de diagonalisabilité et de trigonalisabilité sont des propriétés de classe pour la relation de conjugaison.

Proposition 56 : [Rombaldi, p.200]
Deux matrices diagonalisables sont semblables si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique (autrement dit, elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité).

Proposition 57 :
Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

III.4 Action par congruence

Théorème 58 : [Rombaldi, p.206]
L'application $\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \longmapsto & P \cdot A = PAP^\intercal \end{array} \right.$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Définition 59 : Matrices congruentes [Rombaldi, p.206] :
Deux matrices sont dites **congruentes** lorsqu'elles sont dans la même orbites.

Théorème 60 : [Rombaldi, p.207]
* Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices symétriques sont congruentes si, et seulement si, elles ont le même rang.
* Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deux matrices symétriques sont congruentes si, et seulement si, elles ont la même signature.
* Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, deux matrices symétriques inversibles sont congruentes si, et seulement si, elles ont le même discriminant (modulo les carrés de $\mathbb{F}_q^*$).

IV Sur le corps des réels ou des complexes

On suppose dans toute cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

IV.1 Groupe orthogonal

Dans toute cette sous-partie, on muni E d'un produit scalaire noté $< \cdot ; \cdot >$ de sorte que $(E, < \cdot ; \cdot >)$ soit un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 61 : Isométrie [Rombaldi, p.720]
On appelle **isométrie de** E toute application conservant le produit scalaire.

Théorème 62 : [Rombaldi, p.720]
Une application $u : E \longrightarrow E$ est une isométrie si, et seulement si, u est linéaire et conserve la norme.

Théorème 63 : [Rombaldi, p.720]
Une isométrie est un automorphisme de E et $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Définition 64 : Matrice orthogonale [Rombaldi, p.723] :
On appelle **matrice orthogonale** toute matrice réelle M vérifiant la relation $MM^\top = M^\top M = I_n$.

Corollaire 65 : [Rombaldi, p.724]
Pour toute isométrie $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$.

Théorème 66 : [Rombaldi, p.724]
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ d'indice 2.

Théorème 67 : Théorème de Cartan-Dieudonné [Perrin, p.143] :
Tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est produit d'exactement $n-p$ réflexions (avec p la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$).

Théorème 68 : [Perrin, p.143 + 145]
Si E est de dimension 2, alors :
* Les éléments de $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ sont les réflexions de E.
* Les éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont produits de deux réflexions de E.
* Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est abélien.

Théorème 69 : [Perrin, p. 143]
Pour $n \geq 3$, tout élément de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n renversements.

Théorème 70 : [Francinou (2), p.67]
Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

IV.2 Propriétés topologiques du groupe linéaire

Proposition 71 : [Rombaldi, p.161]
Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $u \longmapsto u^{-1}$ est continue.

Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]

Corollaire 72 : [Rombaldi, p.689]
Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Corollaire 73 : [Rombaldi, p.689]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition 74 : [Hassan, p.713]
Les groupes $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$ sont compacts.

Proposition 75 : [Rombaldi, p.756]
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 76 : [Hassan, p.713]
Les groupes $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Proposition 77 : [Hassan, p.714]
$*$ Le groupe compact $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
$*$ Le groupe compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ possède exactement deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

IV.3 Sous-groupes finis du groupe linéaire

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.

Développement 3 : [cf. FRANCINOU (1)]

Lemme 78 : [Francinou (1), p.353]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Tr}\left(M^k\right) = 0$.

Théorème 79 : Théorème de Burnside [Francinou (1), p.353] :
Soit H un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Si H est d'exposant fini, alors il est fini.

Remarque 80 :
$*$ Le lemme précédent est faux en caractéristique non nulle. Par exemple si $\mathbb{K}$ est de caractéristique p, alors $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ n'est pas nilpotente mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}\left(I_p^k\right) = 0$.
$*$ Le théorème précédent est faux en caractéristique non nulle. Par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p[T]$, alors
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}),\ a \in \mathbb{K} \right\}$$
est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$d'exposant p mais infini.

Théorème 81 :
Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ d'ordre fini on ait $A^r = I_n$.
De plus, le plus petit entier naturel non nul r qui possède cette propriété est $r = \mathrm{PPCM}(\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \varphi(k) \leq n\})$.

Remarque 82 :
$*$ Pour les premières valeurs de n, on a par exemple $r_1 = \mathrm{PPCM}(1,2) = 2$ et $r_2 = \mathrm{PPCM}(1,2,3,4,6) = 12$.
$*$ Il n'existe pas d'éléments d'ordre r_n pour $n \geq 2$.

Corollaire 83 :
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes finis à isomorphisme près.

Remarque 84 :
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ contient tous les groupes de cardinal au plus n (à l'isomorphisme près).

Corollaire 85 :
Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ ne sont pas isomorphes.

Théorème 86 : [Francinou (1), p.377]
Soit p un nombre premier impair.
Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors la restriction à G de la réduction modulo p de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ est injective.

Corollaire 87 : [Francinou (1), p.377]
Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors on a la majoration suivante : $\mathrm{Card}(G) \leq \mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_3)) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(3^n - 3^k\right) \leq 3^{n^2}$.

Remarques sur le plan

— On peut aussi s'intéresser au théorème de Frobenius-Zolotarev ou bien de représentations linéaires ou encore insister d'avantage sur les orbites pour les différentes actions proposées.

Liste des développements possibles

— Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

— Dénombrement des endomorphismes nilpotents sur un corps fini.

— Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

— Théorème de Burnside.

Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre, le grand combat*.

— Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.